Aula 4

Lembrete Sejam E EB, $A: D(A) \subset E \to E$ fechado.

1) espectro pontual aproximado de A:

$$\sigma_{ap}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \{x_n\} \subset D(A),\ \|x_n\| = 1 \text{ e } \lambda x_n - Ax_n \to 0\}.$$

2) $\sigma_{ap}(A) = \sigma_p(A) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : R((\lambda - A)) \neq \overline{R((\lambda - A))} \text{ em } E\}$

3) espectro residual de A:

$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R((\lambda - A))} \neq E\}$ (ou seja $R((\lambda - A))$ não é densa em E)

4) $\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) \cup \sigma_r(A)$.

Proposição 1 Sejam $A: D(A) \subset E \to E$ fechado, $\lambda \in \rho(A)$, $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\beta \in \mathbb{C}$ =>

1) $\sigma(\underbrace{R_\lambda(A)}_{(\lambda - A)^{-1}}) \setminus \{0\} = (\lambda - \sigma(A))^{-1} = \left\{\frac{1}{\lambda - \nu} : \nu \in \sigma(A)\right\}$

2) $\sigma_j(R_\lambda(A)) \setminus \{0\} = (\lambda - \sigma_j(A))^{-1}$, $j \in \{p, ap, r\}$

3) a) Suponha que $x \in E$, $\mu \neq 0$ satisfazem

$R_\lambda(A)x = \mu x$ $(\mu \in \sigma_p(R_\lambda(A)) \setminus \{0\})$ =>

$$A(\underbrace{\mu R_\lambda(A)x}_{y}) = \left(\lambda - \frac{1}{\mu}\right)(\underbrace{\mu R_\lambda(A)x}_{y}) \quad \left(\lambda - \frac{1}{\mu} \in \sigma_p(A)\right)$$

b) Suponha que $y \in D(A)$, $\nu = \lambda - \frac{1}{\mu}$ satisfazem (2)

$Ay = (\lambda - \frac{1}{\mu})y \quad (\lambda - \frac{1}{\mu} \in \sigma_p(A)) \Rightarrow$

$R_\lambda(A)\big(\underbrace{\mu^{-1}(\lambda y - Ay)}_{z}\big) = \mu\big(\underbrace{\mu^{-1}(\lambda y - Ay)}_{z}\big) \quad (\mu \in \sigma_p(R_\lambda(A)))$

4) Se A for não limitado $\Rightarrow 0 \in \sigma(R_\lambda(A)) \ \forall \lambda \in \rho(A)$

5) $\sigma(\alpha A + \beta I) = \alpha\sigma(A) + \beta$ e $\sigma_j(\alpha A + \beta I) = \alpha\sigma_j(A) + \beta$,

$j \in \{p, ap, r\}$.

<u>Demonstração</u> 1) Observe que $\forall \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

temos $\mu - R_\lambda(A) = ((\lambda - \frac{1}{\mu})I - A)\,\mu R_\lambda(A)$ (1)

(é só usar $R_\lambda(A) = (\lambda - A)^{-1}$, $(\lambda - A)\cdot R_\lambda(A) = I$)

Suponha que $\mu \in \rho(R_\lambda(A)) \Rightarrow \mu - R_\lambda(A)$ é bijetor

e $\|(\mu - R_\lambda(A))^{-1} y\| \leq C\|y\| \quad \forall y \in E$. Seja

~~Como $\mu - R_\lambda(A)$ é bijetor, $\forall y \in E \ \exists x \in E$ t.q.~~

$y = (\mu - R_\lambda(A))x \Rightarrow \|(\mu - R_\lambda(A))^{-1}(\mu - R_\lambda(A))x\| \leq$

$\leq C\|(\mu - R_\lambda(A))x\| \Rightarrow \frac{1}{C}\|x\| \leq \|(\mu - R_\lambda(A))x\|$

$\forall x \in E$. (2)

Agora já que $\mu R_\lambda(A) : E \to D(A)$ é bijetor $\underset{(1)}{\Rightarrow}$

$(\lambda - \frac{1}{\mu})I - A$ é bijetor $\underset{(2)}{\Rightarrow} \|((\lambda - \frac{1}{\mu})I - A)y\| \geq \frac{1}{C}\|y\|$

$\forall y \in D(A)$. Logo $((\lambda - \frac{1}{\mu})I - A)^{-1}$ existe em

todo E e $\|((\lambda - \frac{1}{\mu})I - A)^{-1} x\| \leq C\|x\|, \forall x \in E$

$\Rightarrow (\lambda - \frac{1}{\mu}) \in \rho(A)$. Recíproca é análoga e segue da (1).

Finalmente, $\mu \in \sigma(R_\lambda(A)) \Leftrightarrow \underbrace{(\lambda - \frac{1}{\mu})}_{\nu} \in \sigma(A)$

$(\mu = \frac{1}{\lambda - \nu}, \; \nu \in \sigma(A))$

2) • $\sigma_p(R_\lambda(A)) \setminus \{0\} = (\lambda - \sigma_p(A))^{-1}$:

Seja $\mu \in \sigma_p(R_\lambda) \setminus \{0\} \Rightarrow \exists x \in E$ t.q. $(\mu - R_\lambda(A))x = 0$

$\underset{(1)}{\Rightarrow} (\mu - R_\lambda(A))x = ((\lambda - \frac{1}{\mu}) - A)\underbrace{\mu R_\lambda(A) x}_{y} = 0 \Rightarrow$

y é autovetor com autovalor $\lambda - \frac{1}{\mu}$. $\Rightarrow$

$\underbrace{(\lambda - \frac{1}{\mu})}_{\nu} \in \sigma_p(A)$. Recíproca é óbvia.

$\nu \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda - \nu}$

• $\sigma_{ap}(R_\lambda(A)) \setminus \{0\} = (\lambda - \sigma_{ap}(A))^{-1}$:

Seja $\mu \notin \sigma_{ap}(R_\lambda(A))$ e $\mu \neq 0 \Rightarrow \mu \notin \sigma_p(R_\lambda(A))$ $\Rightarrow$

e $R((\mu - R_\lambda(A))$ é fechado: $\forall \{y_n\} \subset D(A)$ e $\{x_n\} \subset E$

tais que $\mu x_n - R_\lambda(A) x_n = y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \Rightarrow \exists x \in E$ tal que

$y = \mu x - R_\lambda(A) x$ $(y \in R((\mu - R_\lambda(A)))$.

Mostremos que $R((\lambda - \frac{1}{\mu}) - A)$ é fechado (ou seja $(\lambda - \frac{1}{\mu}) \notin \sigma_{ap}(A))$.

Sejam $\{u_n\} \in D(A)$ e $\{v_n\} \subset E$ tais que

$(\lambda - \frac{1}{\mu}) u_n - A u_n = v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$. Seja $\{x_n\} \subset E$ t.q.

$u_n = \mu R_\lambda(A) x_n \Rightarrow (\mu - R_\lambda(A)) x_n = ((\lambda - \frac{1}{\mu}) - A) u_n \to v$

$\Rightarrow \exists x \in E$ t.q. $v = \mu x - R_\lambda(A) x$ (desde que $R((\mu - R_\lambda(A))$ é fechada) $\underset{(1)}{\Rightarrow}$

$$v = \mu x - R_\lambda(A)x = ((\lambda-\tfrac{1}{\mu})-A)\underbrace{\mu R_\lambda(A)x}_{z\in D(A)} =$$

$$= ((\lambda-\tfrac{1}{\mu})-A)z \Rightarrow$$

$R((\lambda-\frac{1}{\mu})-A)$ é fechada $\Rightarrow \lambda - \frac{1}{\mu} \notin \sigma_{ap}(A)$

(observe que $\lambda-\frac{1}{\mu} \notin \sigma_p(A)$ por passo anterior).

Recíproca é fácil.

Para σ_r o resultado também segue da (1).

De fato se $\mu \notin \sigma_r(R_\lambda(A)) \Rightarrow \overline{R((\mu - R_\lambda(A))} = E$

$\underset{(1)}{\Rightarrow} \overline{R((\lambda-\frac{1}{\mu})I - A)} = E \Rightarrow (\lambda-\frac{1}{\mu})\notin\sigma_r(A)$

4) Temos $R_\lambda(A)^{-1} = \lambda - A$. Se A é não lim.

$\Rightarrow \lambda - A$ é não lim. $\Rightarrow 0 \in \sigma(R_\lambda(A))$

5) Prova é análoga a uma dos 1) e 2) usando

$$\lambda I - (\alpha A + \beta I) = \alpha\left(\frac{\lambda-\beta}{\alpha} I - A\right)$$

3) Segue da (1).

Ex 1 $E = L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, $(T(t)f)(s) = f(s+t)$, $t, s \in \mathbb{R}$, (5)

$D(T(t)) = E$ (operador de translação) $\Rightarrow$

1) $p = \infty \Rightarrow \sigma(T(t)) = \sigma_p(T(t)) = \partial B_1(0)$

2) $p \in [1, \infty) \Rightarrow \sigma(T(t)) = \sigma_{ap}(T(t)) = \partial B_1(0)$

<u>Demonstração</u> É fácil ver que $T(t)$ é isométrico e $T^{-1}(t) = T(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \| T(t) \| = \| T(-t) \| = 1$

$\Rightarrow \sigma(T(t)) \subseteq \bar{B}_1(0)$ e $\sigma(T^{-1}(t)) \subseteq \bar{B}_1(0)$. Do outro lado, pela <u>Prop 1</u>, $\sigma(T^{-1}(t)) = \sigma(T)^{-1} \subseteq \mathbb{C} \setminus B_1(0)$.

Logo, $\sigma(T(t)) \subseteq \partial B_1(0)$.

1) $p = \infty$. Seja $\lambda \in i\mathbb{R} \Rightarrow e^{\lambda s} \in L^\infty(\mathbb{R})$ $(|e^{\lambda s}| = 1$

$\Rightarrow$ ~~$e^{\lambda s} \in \partial B_1(0)$~~ $)$.

Temos $T(t) e^{\lambda s} = e^{\lambda(s+t)} = e^{\lambda t} e^{\lambda s} \Rightarrow$ para todo

$\underset{= e^{\lambda t} \text{ para algum } \lambda \in i\mathbb{R}}{\mu \in \partial B_1(0)}$ concluimos $\mu \in \sigma_p(T(t)) \Rightarrow$

$\partial B_1(0) \subseteq \sigma_p(T(t)) \subseteq \sigma(T(t)) \underset{\sigma(T(t)) \subseteq \partial B_1(0)}{\Longrightarrow} \sigma(T(t)) = \sigma_p(T(t)) = \partial B_1(0)$

2) $p \in [1, \infty)$. Mostremos que $\forall \lambda \in i\mathbb{R}$ $e^{\lambda t} \in \sigma_{ap}(T(t))$. Vamos construir a sequência dos autovalores aproximados. Seja $f_n(s) = n^{-1/p} \chi_{[0,n]} e^{\lambda s} \Rightarrow$

$\| f_n \|_p = 1$. Temos $\| T(t) f_n(s) - e^{\lambda t} f_n(s) \|_p =$

$= \| n^{-1/p} e^{\lambda(t+s)} (\chi_{[t, n+t]} - \chi_{[0,n]}) \|_p =$

$= n^{-1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} |\chi_{[t, n+t]} - \chi_{[0,n]}|^p ds \right)^{1/p} = n^{-1/p} |2t|^{1/p} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$

$e^{\lambda t} \in \sigma_{ap}(T(t)) \Rightarrow \partial B_1(0) \subseteq \sigma_{ap}(\tilde{T}(t)) \subseteq \sigma(T(t))$.

← funções cont. com limites 0 em $\pm\infty$

Ex 2 $E = C_0(\mathbb{R})$, $\|x\|_E = \sup_{\mathbb{R}} |x(t)|$, $D(A) = C_0^1(\mathbb{R}) =$
$= \{f \in C^1(\mathbb{R}) : f, f' \in C_0(\mathbb{R})\}$, $(Ax)(t) = x'(t) \Rightarrow$
$\sigma(A) = \sigma_{ap}(A) = i\mathbb{R}$, $\sigma_p(A) = \emptyset$.

<u>Demonstração</u> • Mostremos que $K = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \neq 0\} \subseteq \rho(A)$

~~$(\lambda - A)$ in~~ Seja $\lambda \in K$.

<u>$(\lambda - A)$ injetora</u>: Suponha que $\exists x_\lambda \in D(A)$ tal que $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$ ou $x_\lambda' = \lambda x_\lambda \Rightarrow x_\lambda = Ce^{\lambda t} \notin C_0(\mathbb{R})$ para $C \neq 0$.

<u>$(\lambda - A)$ sobrejetora</u>: Seja $f \in E$ e $x(t) = \int_t^\infty e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ (2)

e $x(t) = -\int_{-\infty}^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (3) $\Rightarrow$
(2), (3) $\in C_0^1(\mathbb{R})$ e $(\lambda - A)x = f$. De fato, de (2) segue: $\lambda \int_t^\infty e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds \underbrace{- \lambda \int_t^\infty e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds + f(s)}_{(Ax)(t)} = f(s)$

(analogamente para (3))

<u>$R_\lambda(A)$ limitado</u>: para $\operatorname{Re}\lambda > 0$:

$(R_\lambda(A)f)(t) = \int_t^\infty e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds \Rightarrow \|R_\lambda f\| \le \|f\| \int_t^\infty |e^{\lambda(t-s)}|\,ds$

$= \|f\| \int_t^\infty e^{\operatorname{Re}\lambda(t-s)}\,ds = \|f\| \left(-\frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}\right) e^{\operatorname{Re}\lambda(t-s)} \Big|_t^\infty =$

← analogamente para $\operatorname{Re}\lambda < 0$

$= \|f\| \cdot \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$ ~~$\Rightarrow \sigma(A$~~ Finalmente $K \subseteq \rho(A) \Rightarrow$
$\sigma(A) \subseteq \mathbb{C} \setminus K = i\mathbb{R}$.

Observe que seria suficiente também mostrar que A é fechado.

- Mostremos que $i\mathbb{R} \subseteq \sigma_{ap}(A)$. Seja $\lambda \in i\mathbb{R} \Rightarrow \lambda \notin \sigma_p(A)$ (mostre). Construímos sequência das autovetores aproximados. Seja $\varphi_n \in C_0^1(\mathbb{R})$ com

constante positiva

$\|\varphi_n'\| \leq \frac{c}{n}$ e $\|\varphi_n\| = 1$. Define $u_n(t) = \varphi_n(t) e^{\lambda t} \Rightarrow$

$\|u_n\| = 1$, $u_n \in D(A)$ e $(Au_n)(t) = \varphi_n'(t) e^{\lambda t} + \varphi_n(t) \lambda \cdot e^{\lambda t} =$

$= \varphi_n'(t) e^{\lambda t} + \lambda u_n(t) \Rightarrow \|Au_n - \lambda u_n\| = \|\varphi_n'(t) e^{\lambda t}\| =$

$= \|\varphi_n'\| \leq \frac{c}{n} \to \infty \Rightarrow \lambda \in \sigma_{ap}(A) \Rightarrow i\mathbb{R} \subseteq \sigma_{ap}(A)$

$\Rightarrow \sigma(A) = \sigma_{ap}(A) = i\mathbb{R}$.